Série d'exercices 2

Décembre 2019

Restauration d'images par EDP

Exercice 1. Écrire les modèles locaux associés aux équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \Big(\alpha_1 \nabla u + \alpha_2 \nabla u^{\perp}\Big), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \Big(\alpha_1(|\nabla u|^2)\nabla u + \alpha_2(|\nabla u|^2)\nabla u^{\perp}\Big)$$

Exercice 2. Réécrire l'équation de Perona-Malik dans le repère local défini par η et ξ avec

$$c(s) = \frac{1}{1+(\lambda s)^2}$$

Exercice 3. On considère une EDP d'évolution et son action sur les courbes de niveaux :

$$E_c = \{(x,y), u(x,y) = c\}.$$

Supposons que les courbes de niveaux suivent le mouvement :

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} = F \ \cdot \ \mathcal{N}$$

où $F = F(E, E', E'')$, et $\mathcal{N}$ est le vecteur normal à la courbe de niveau.

1. Déterminer les expressions des vecteurs tangent et normal aux courbes de niveaux.
2. Montrer que u suit l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\|\nabla u\|$$

Exercice 4. Mouvement par courbure moyenne (MCM)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_{\xi\xi}$$

1. Montrer que :

$$u_{\xi\xi} = |\nabla u| \operatorname{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})$$

2. Déterminer le mouvement des courbes de niveaux.

Exercice 5. Donner une discrétisation par différences finies du mouvement par courbure moyenne.