Université Saad Dahlab - Blida 1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Niveau : Master 1 - Maths
Année : 2020-2021, Semestre 1
Matière : Intro. au traitement d'images

Série d'exercices 3

Traitement fréquentiel

Janvier 2021

Exercice 1 On considère un signal discret 4-périodique $x(n)$. Exprimer x en terme d'exponentielles complexes et déterminer la $DFT, X(k)$. Comparer.

$$x_1(n) = 1 + 3\cos\left(\frac{2\pi}{4}n + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(2\frac{2\pi}{4}n\right),\ x_2(n) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{4}n + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2\frac{2\pi}{4}n\right)$$

Exercice 2 Calculer la DFT des signaux suivants et vérifier la formule d'inversion et la formule de Parseval.

— $\{x(0) = 3, x(1) = \sqrt{3}, x(2) = 1, x(3) = -\sqrt{3}\}$
— $\{x(0) = 4, x(1) = 0, x(2) = 0, x(3) = 0\}$
— $\{x(0) = 2, x(1) = 2, x(2) = 2, x(3) = 2\}$
— Le signal de taille 8, échantillonné ̀partir de la fonction

$$f(n) = 2\cos(2\frac{2\pi}{8}n - \frac{\pi}{3}) = \cos(2\frac{2\pi}{8}n) + \sqrt{3}\sin(2\frac{2\pi}{8}n).$$

Retrouver les résultats précédents en utilisant la matrice associée à la DFT.

Exercice 3 On considère une image discrète 4-périodique $x(m,n)$. Exprimer x en termes d'exponentielles complexes et en conclure les coefficients de sa $DFT2$, $X(k,l)$. Vérifier la formule d'inversion et le théorème de Parseval. Trouver l'erreur des moindres carrés si x est représentée par sa composante DC avec les valeurs $X(0,0)$, $0.9X(0,0)$, et $1.1X(0,0)$.

$$x(m,n) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{4}(m+n) - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\frac{2\pi}{4}(m+n)\right)$$

$$x(m,n) = 2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{4}(m+2n) + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2\frac{2\pi}{4}(m+n)\right)$$

Exercice 4 Trouver la $DFT2$ des images x et h en utilisant la méthode ligne-colonne. Reconstruire l'entrée à partir des coefficients $DFT2$. Vérifier le théorème de Parseval. Exprimer la magnitude de la DFT dans le format centré en utilisant l'echelle $\log_{10}(1 + |X(k,l)|)$.

$$x(m,n) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 112 & 148 & 72 & 153 \\ \hline 120 & 125 & 30 & 99 \\ \hline 95 & 120 & 89 & 33 \\ \hline 170 & 99 & 109 & 40 \\ \hline\end{array},\ ,\quad h(m,n) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 164 & 127 & 117 & 59 \\ \hline 154 & 122 & 104 & 83 \\ \hline 129 & 136 & 100 & 360 \\ \hline 117 & 128 & 80 & 48 \\ \hline\end{array}$$

Trouver (a) la convolution périodique de x et h, (b) la corrélation périodique de x et h, et de h et x, (c) l'autocorrélation de x.

Exercice 5 Calculer la DFT du vecteur colonne $x(m) = \{1, 1, -1, -1\}$ et du vecteur ligne $x(n) = \{1, 1, -1, -1\}$. En utilisant la propriété de séparabilité, vérifier que le produit des vecteurs dans le domaine temporel (spatial) est identique a la $iDFT2$ du produit de leurs $DFT2$ individuelles.

Exercice 6 Calculer la convolution linéaire de $x(n), n = 0, 1, \dots,$ et $h(n), n = 0, 1, \dots,$ en utilisant DFT et $IDFT$. Vérifier la réponse en utilisant la formule directe de la convolution. On utilise le zéro-padding.

(i) $x(n) = \{2, 1, 3\}$ et $h(n) = \{1, -2\}$, **(ii)** $x(n) = \{-1, 3\}$ et $h(n) = \{1, 3, 2\}$.

(iii) $x(n) = \{4, -1\}$ et $h(n) = \{-3, 1, -2\}$, **(iv)** $x(n) = \{-1, 2, 3\}$ et $h(n) = \{-2, 3\}$.

(v) $x = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & -3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}$, , $h = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & -1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$, **(vi)** $x = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & -3 & -1 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline\end{array}$, , $h = \begin{array}{|c|c|}\hline -2 & -1 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array}$

Exercice 7 En utilisant la DFT et $iDFT$,calculer la convolution de $x(m, n)$ avec le filtre gaussien passe-bas 3×3 avec $\sigma = 1$. On suppose des conditions aux bords periodiques.

$$x_1(m, n) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 2 & -2 \\ \hline 3 & 2 & -2 & 1 \\ \hline\end{array}, \quad , \quad x_2(m, n) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 4 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 2 & -2 & 1 \\ \hline\end{array}$$

Exercice 8 Dans le filtrage fréquentiel, il existe 3 grands types de filtres. Pour chacun d'eux, vous expliquerez son rôle dans le filtrage d'image et dans quels cas on l'utilise.

Exercice 9 Image à partir de son spectre

Retrouver à quelle image 1,2,3, ou 4 correspond le spectre d'amplitude a,b,c ou d. (4 points)