Université de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques

Niveau : Master 1 - Analyse mathématique
Année : 2021-2022, Semestre 2
Matière : Vision artificielle

Examen final

Juin 2022 - Durée : 1h00

Exercice 1 Questions de cours (10 points)

1. Quelle est la différence entre le filtre du minimum et le filtre d'érosion ? *1 pt*
2. Donner la formule du critère de Harris et dire comment est utilisée. *2 pt*
3. Donner une description de l'algorithme de Harris-Laplace. *2.5 pt*
4. Est-ce que la méthode est invariante par rapport à l'ajout d'une constance à l'intensité ? En donner une justification. *1 pt*
5. Comment est calculé le gradient morphologique ? *1 pt*
6. A quoi correspond les hautes fréquences dans une image ? *1.5 pts*
7. Comment éviter le phénomène de réverbération lors du filtrage fréquentiel ? *1 pt*

Exercice 2 Méthode d'Otsu (5 points)
Appliquer la méthode d'Otsu pour la segmentation de l'image suivante :

$I =$

2	1	4	5
1	3	2	5
2	2	5	6
7	3	1	2

Exercice 3 SVD (5 points)
Réaliser une décomposition SVD de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Université de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques

Niveau : Master 1 - Analyse mathématique
Année : 2021-2022, Semestre 2
Matière : Vision artificielle

Examen final

Juin 2022 - Durée : 1h00

Correction 1 1. Différence entre le filtre du minimum et le filtre d'érosion : Le filtre du minimum est un cas particulier du filtre d'érosion qui correspond à un choix d'un élément structurant 3×3.

2. Formule du critère de Harris :

$$R = det(M) - k(trace(M))^2,$$

où $M = \begin{bmatrix} \sum_{x,y} I_x^2 & \sum_{x,y} I_x I_y \\ I_x I_y & \sum_{x,y} I_y^2 \end{bmatrix}$, I est l'image, $k > 0$.

— $|R|$ est petit : région homogène.
— $R < 0$: contours,
— R est grand : coins.

3. L'algorithme de Harris-Laplace est utilisé pour détecter les points caractéristiques (coins ou blobs) d'une manière invariante à l'échelle.
   (a) On commence par effectuer une détection des coins par la méthode de Harris, appliquée à la convolution de l'image originale avec une gaussien d'écart-type $\sigma_n = s^n \sigma_0$ (plusieurs échelles).
   (b) Parmi les points retenus, choisir ceux qui maximisent Laplacian-of-Gaussian (LoG) par rapport à (x,y,σ).
4. La méthode de Harris est invariante par rapport à l'ajout d'une constance à l'intensité car les formules font intervenir les dérivées seulement.
5. Le gradient morphologique est calculé comme la différence ensembliste entre la dilatation et l'érosion.
6. Les hautes fréquences dans une image correspondent à : Contours, Bruits, Texture.
7. Pur éviter le phénomène de réverbération lors du filtrage fréquentiel, on effectue un filtre passe- bas au préalable.

Correction 2 On construit le tableau suivant :

T	1	2	3	4	5	6	7
σ	3.4023	2.2981	0.9609	0.6396	0.7568	1.8348	2.4334

.

Et ce selon la méthode suivante.

— Pour une seuil $S = 1$.

$$I_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad , \quad I_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_1 =; \sigma_1^2 =; \quad \mu_2 = 3.1875; \sigma_2^2 = 3.4023.$$

$$\sigma_w^2 = \sigma_2^2 = 3.4023.$$

— Pour une seuil $S = 2$.

$$I_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 1 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline \end{array} \quad , \qquad I_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & & 4 & 5 \\ \hline & 3 & 2 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 3 & & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_1 = 1; \sigma_1^2 = 0; \quad \mu_2 = 3.6923; \sigma_2^2 = 2.8284.$$

$$\sigma_w^2 = \frac{3}{16}\sigma_1^2 + \frac{13}{16}\sigma_2^2 = 2.2981.$$

— Pour une seuil $S = 3$.

$$I_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & & \\ \hline 1 & & 2 & \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline & & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad , \qquad I_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & 4 & 5 \\ \hline & 3 & & 5 \\ \hline & & 5 & 6 \\ \hline 7 & 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_1 = 1.6250; \sigma_1^2 = 0.2344; \quad \mu_2 = 4.7500; \sigma_2^2 = 1.6875.$$

$$\sigma_w^2 = \frac{8}{16}\sigma_1^2 + \frac{8}{16}\sigma_2^2 = 0.9609.$$

— Pour une seuil $S = 4$.

$$I_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & & \\ \hline 1 & 3 & 2 & \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline & 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad , \qquad I_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & 4 & 5 \\ \hline & & & 5 \\ \hline & & 5 & 6 \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_1 = 1.9000; \sigma_1^2 = 0.4900; \quad \mu_2 = 5.3333; \sigma_2^2 = 0.8889.$$

$$\sigma_w^2 = \frac{10}{16}\sigma_1^2 + \frac{6}{16}\sigma_2^2 = 0.6396.$$

— Pour une seuil $S = 5$.

$$I_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 4 & \\ \hline 1 & 3 & 2 & \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline & 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad , \qquad I_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & 5 \\ \hline & & & 5 \\ \hline & & 5 & 6 \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_1 = 2.0909; \sigma_1^2 = 0.8099; \quad \mu_2 = 5.6000; \sigma_2^2 = 0.6400.$$

$$\sigma_w^2 = \frac{11}{16}\sigma_1^2 + \frac{5}{16}\sigma_2^2 = 0.7568.$$

— Pour une seuil $S = 6$.

$$I_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 5 & \\ \hline & 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad , \qquad I_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & 6 \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_1 = 2.7143; \sigma_1^2 = 2.0612; \quad \mu_2 = 6.5000; \sigma_2^2 = 0.2500.$$

$$\sigma_w^2 = \frac{14}{16}\sigma_1^2 + \frac{2}{16}\sigma_2^2 = 1.8348.$$

— Pour une seuil $S = 7$.

$$I_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 5 & 6 \\ \hline & 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad , \qquad I_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_1 = 2.9333; \sigma_1^2 = 2.5956; \quad \mu_2 = 7; \sigma_2^2 = 0.$$

$$\sigma_w^2 = \frac{15}{16}\sigma_1^2 + \frac{1}{16}\sigma_2^2 = 2.4334.$$

La valeur optimale du seuil est $S_0 = 4$.

Correction 3 La décomposition SVD s'écrit :

$$A = UDV^T$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 2);\ \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2.$$

Les valeurs singulières sont $\sigma_1 = \sqrt{4} = 2$ and $\sigma_2 = \sqrt{2}$. So, $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

$$A^T A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \implies \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^T A\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \implies \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On normalise $\mathbf{v}_i$ pour avoir $\|\mathbf{v}_i\| = 1$. Alors,

$$\boxed{V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

D'autre part, $AV = U\Sigma$. Alors, on peut écrire : $\mathbf{u}_j = \frac{1}{\sigma_j}A\ \mathbf{v}_j$, i=1,2. Le vecteur $\mathbf{u}_3$ peut être facilement déduit de l'orthogonalité de U. Au final, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T.$$